REKEN XL

antwoorden groep 6 | 7 | 8

c

BABYLONISCHE GETALLEN

getallen en bewerkingen

MALMBERG

REKEN XL

antwoorden groep 6 | 7 | 8

c

GRAFEN

meten en meetkunde

595686

9 789402 067910

MALMBERG

Realisatie

Projectgroep Malmberg b.v.

PPMP Prepress

Ontwerp

Studio Struis

Illustraties

Studio Struis

Foto's

Louvre Museum

Shutterstock

ISBN 978 94 020 6791 0
RekenXL
Eerste druk, eerste oplage

MALMBERG

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C114590

REKEN XL

antwoorden groep 6 | 7 | 8

C

BABYLONISCHE GETALLEN

Van de makers van DE WERELD IN GETALLEN & PLUS PUNT

CONCEPTAUTEURS
Greetje van Dijk
Anneke van Gool

EINDREDACTIE
Maurice Breugelmans
Anne Wichgers

AUTEURS
Greetje van Dijk
Anneke van Gool
Corinne Harten
Fokke Munk
Fred Steetsel
Gerrit van Wolfswinkel

Malmberg 's-Hertogenbosch

REKEN XL

antwoorden groep 6 | 7 | 8

C

GRAFEN

Van de makers van DE WERELD IN GETALLEN & PLUS PUNT

CONCEPTAUTEURS
Greetje van Dijk
Anneke van Gool

EINDREDACTIE
Maurice Breugelmans
Anne Wichgers

AUTEURS
Greetje van Dijk
Anneke van Gool
Corinne Harten
Fokke Munk
Fred Steetsel
Gerrit van Wolfswinkel

Malmberg 's-Hertogenbosch

BABYLONISCHE GETALLEN

ZO'N 4000 JAAR GELEDEN WAS ER EEN BELANGRIJK KONINKRIJK IN HET GEBIED DAT NU IRAK HEET: BABYLONIË. DE BABYLONIERS HIELDEN ZICH VEEL BEZIG MET WETENSCHAP. ZE SCHREVEN IN SPIJKERSCHRIFT EN VERDIEPTEN ZICH IN WISKUNDE.

BIJ OPGRAVINGEN ZIJN KLEITABLETTEN GEVONDEN MET TEKSTEN, BIJVOORBEELD OVER HOEVEEL GEITEN EN SCHAPEN ER WERDEN VERHANDELD.

OP KLEITABLET 'AO 8862' STAAN REKENSOMMEN EN ZELFS REKENRAADSELS. HOE ZOUDEN DE BABYLONIËRS HEBBEN GEREKEND?

GRAFEN

IN EEN KLIMPARK GA JE AAN TOUWEN, VIA NETBRUGGEN OF MET EEN ROETSJBAAN VAN PLATEAU NAAR PLATEAU. ZO'N PARCOURS KUN JE VERGELIJKEN MET EEN GRAAF.

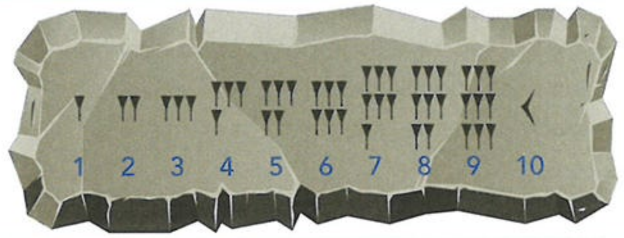
EEN GRAAF IS EEN MEETKUNDIGE FIGUUR DIE BESTAAT UIT EEN AANTAL PUNTEN, VERBONDEN DOOR LIJNSTUKKEN. HOE DIE PUNTEN MET ELKAAR ZIJN VERBONDEN, ONTDEK JE MET DE GRAFENTHEORIE.

DE WISKUNDIGE LEONHARD EULER BEDACHT DE GRAFENTHEORIE TOEN HIJ HET KONINGSBERGER BRUGGENPROBLEEM WILDE OPLOSSEN.

DOOR KONINGSBERGEN STROOMT EEN RIVIER. IN DE RIVIER LIGGEN 2 EILANDEN DIE MET 7 BRUGGEN MET DE STAD ZIJN VERBONDEN. IS ER EEN ROUTE WAARBIJ JE OP DEZELFDE PLEK START EN STOPT, WAARBIJ JE PRECIES 1 KEER OVER ELKE BRUG LOOPT?

ZO ZIT HET

De symbolen die de Babyloniërs voor getallen gebruikten, lijken op spijkers en haken. Met de platte achterkant van een riet drukten ze deze symbolen in kleitabletten.



1 **Maak een kleitablet met Babylonische getallen.**
Neem klei en een (ijs)stokje.

Druk de Babylonische getallen 1 tot en met 10 in een kleitablet.

DIT LEER JE

Je leert rekenen met het zestigtallig stelsel.

Dit zijn de stappen:
- Maak kennis met de getallen in het zestigtallig stelsel.
- Maak optelsommen en aftreksommen.
- Maak vermenigvuldigingen.
- Maak breuken in het zestigtallig stelsel.

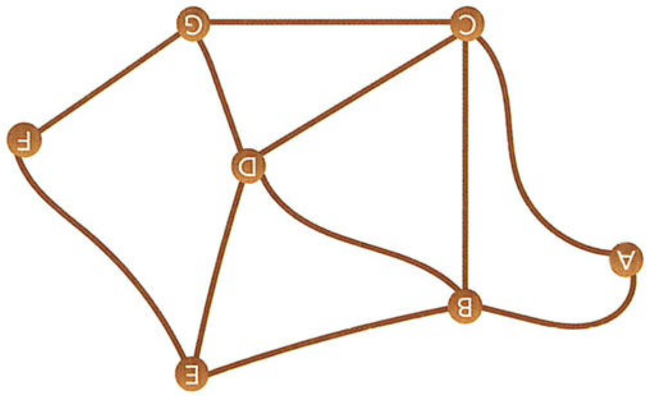
DIT MAAK JE

Je maakt een werkboekje over Babylonisch rekenen.

PLANNING

week 1: opdracht 1-8
week 2: opdracht 9-15
week 3: XL-opdracht 16-20
week 4: eindopdracht en evaluatie

1 **Onderzoek de routes.**
Amber ontwerpt een klimpark. Ze bouwt 7 hoge plateaus en verbindt ze met touwen en netbruggen. Dit is haar werktekening:



a Amber wil een route waarbij je elke verbinding precies 1 keer gebruikt. Beschrijf 2 verschillende routes.

Bijvoorbeeld: route: G – C – A – B – C –D – B – E – F – G – D – E

Of route: E – F – G – C – A – B – E – D – B – C – D – G

Welke plateaus kun je gebruiken als startplaats? alleen plateau G en E

b Amber wil 1 plateau gebruiken als start- en eindpunt. Er moet 1 route zijn waarbij elke verbinding precies 1 keer wordt gebruikt. Welke aanpassing is nodig in Ambers ontwerp?

Bijvoorbeeld: Maak een verbinding tussen G en E. Dan is G – C – A – B – C – D – B – E – F – G – D – E – G een route die op hetzelfde punt begint en eindigt.

DIT LEER JE

Je leert over grafentheorie en toepassingen ervan.

Dit zijn de stappen:
- Leer de begrippen die bij grafen horen.
- Ontdek en ontwerp verschillende typen grafen.
- Onderzoek routes in de grafen.
- Analyseer de overeenkomsten en verschillen.
- Los kleurenproblemen op.

DIT MAAK JE

Je ontwerpt een plattegrond voor een klimpark.

PLANNING

week 1: opdracht 1-5
week 2: opdracht 6-12
week 3: XL-opdracht 13-15
week 4: eindopdracht en evaluatie

ZO ZIT HET

De spijker is het symbool voor de eenheden, de haak voor de tientallen. Zo maakten de Babyloniërs de getallen 1 tot en met 59.

De spijkers staan in groepjes van 3, los of tegen elkaar aan.
De haken staan naast elkaar of over elkaar heen.
Voor het gemak zetten wij de haken en de spijkers achter elkaar.

2 Schrijf en teken de getallen.

a Schrijf de getallen met gewone cijfers.

<<< |||||| 36 <<<<< |||| 54 <<< || 32 << ||||||| 28

b Teken de getallen met spijkers en haken.

15 < ||||| 51 <<<<< | 34 <<< |||| 43 <<<< |||

ZO ZIT HET

Bij getallen groter dan 59 gebruikten de Babyloniërs een positiestelsel.
Als een getal 1 plaats opschuift naar links, wordt het 60 keer zoveel waard.

Een getal met symbolen op 2 posities: = 11 × 60 + 11 × 1 = 671

Een getal met symbolen op 3 posities: = 1 × 3600 + 11 × 60 + 21 = 4281

3 Schrijf de getallen.

| | = 1 × 60 + 1 = 61

< | = 10 × 60 + 1 = 601

<< || = 20 × 60 + 2 = 1202

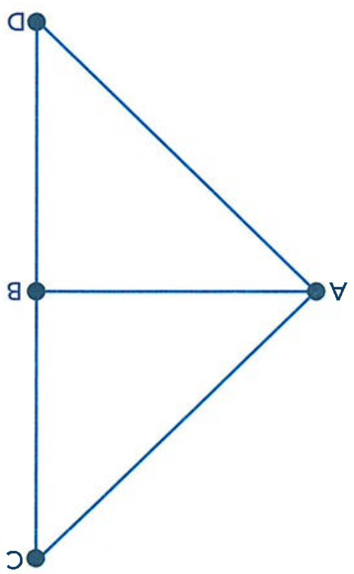
<<|| <<|| = 22 × 60 + 22 = 1342

| <<||| <<< = 1 × 3600 + 23 × 60 + 30 = 5010

| | | | = 1 × 216.000 + 1 × 3600 + 1 × 60 + 1 = 219.661

ZO ZIT HET

- Een graaf bestaat uit **knopen** (punten) en **lijnen**.
  Een lijn is een verbinding tussen 2 knopen.
- Een **pad** is een route over een aantal verbindingen na elkaar.
- Een **gesloten pad** of een **circuit** begint en eindigt op dezelfde knoop.
  Bijvoorbeeld: A – B – D – A.
- Bij een **eulerpad** ga je precies 1 keer over elke lijn.
  Bijvoorbeeld: B – A – C – B – D – A.
- Een **eulercircuit** is een gesloten eulerpad.
  Je start en stopt op dezelfde knoop.
  De graaf in dit voorbeeld is geen eulercircuit.

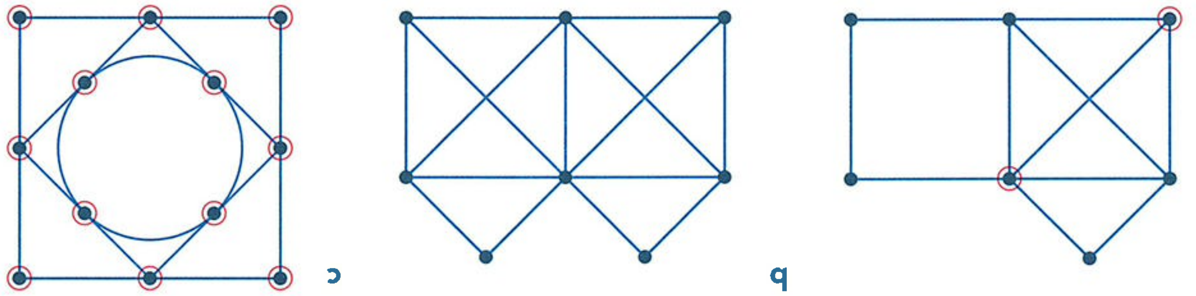


2 Onderzoek de grafen.

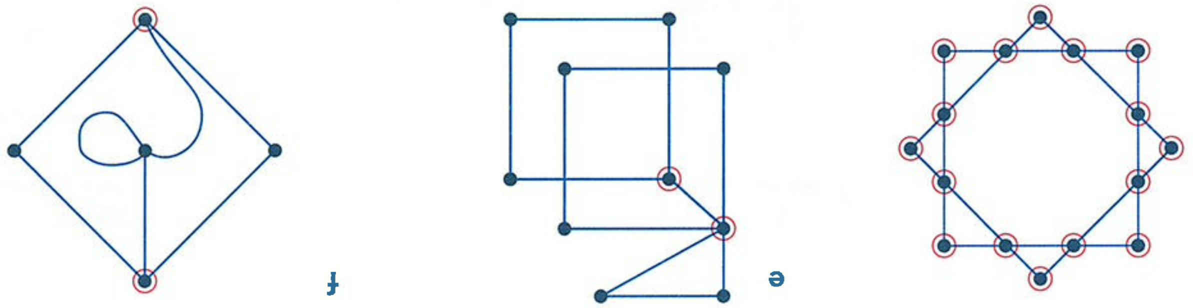
Alleen de blauwe stippen zijn knopen.
Oefen in je schrift.

- Is er een eulerpad en/of een eulercircuit?
- Omcirkel de knopen die het startpunt kunnen zijn voor een eulerpad.

TIP Een graaf heeft een eulerpad als je de lijnen kunt tekenen zonder je potlood van het papier te halen, én nooit 2 keer over dezelfde lijn gaat.



a eulerpad: ja | nee — eulercircuit: ja | nee
b eulerpad: ja | nee — eulercircuit: ja | nee
c eulerpad: ja | nee — eulercircuit: ja | nee



d eulerpad: ja | nee — eulercircuit: ja | nee
e eulerpad: ja | nee — eulercircuit: ja | nee
f eulerpad: ja | nee — eulercircuit: ja | nee

ZO ZIT HET

De Babyloniërs gebruikten geen 0. Daardoor weet je niet altijd op welke positie in een getal de spijkers en haken staan. Dat is lastig. Bedenk maar eens wat er zou gebeuren als wij geen 0 zouden hebben. Het getal 22 kan dan 22, 202, 2020, 200.200, enzovoort betekenen.

Hier hebben de Babyloniërs later toch iets op bedacht. Ze zetten een **plaatshouder** op de plek van een lege positie:
De plaatshouder ziet er zo uit: .
Het zijn 2 spijkers naast elkaar die schuin staan.
Het getal **<<|| \\<<** is dan
22 × 3600 + 0 × 60 + 20 = 79.220.

4 **Bedenk welke getallen het kunnen zijn.**
Er staat geen plaatshouder in het getal. Dan kunnen de symbolen verschillende waarden hebben. Geef steeds 3 mogelijkheden voor de volgende getallen.

Schrijf ook de sommen op. Bijvoorbeeld:

|| = 2; 1 × 60 + 1 = 61; 1 × 3600 + 1 × 60 = 3660;
1 × 216.000 + 1 × 3600 = 219.600; 1 × 3600 + 1 = 3601

<<<<||| <| = 43 × 60 + 11 = 2591; 43 × 3600 + 11 × 60 = 155.460;
43 × 3600 + 11 = 154.811; 43 × 216.000 + 11 = 9.288.011

ZO ZIT HET

Om het rekenen met Babylonische getallen iets overzichtelijker te maken, gebruiken we vanaf nu geen spijkers en haken meer, maar noteren we de Babylonische getallen met dubbele punten ertussen. Bijvoorbeeld: 22 : 0 : 20 betekent: **<< || \\ <<**.

5 **Reken uit.**
We gebruiken het zestigtallig systeem van de Babyloniërs nog steeds bij het noteren van tijden. [uren : minuten : seconden]

a Hoeveel seconden zijn er in totaal voorbij op deze klok?
12.250

b Reken uit hoeveel seconden er voorbij zijn.
12 : 12 : 12 = 43.932
01 : 59 : 59 = 7199

c Bij tijden tel je nooit verder dan 23:59:59, omdat er 24 uur in een dag zitten.
Bij Babylonisch tellen kun je wél doorgaan.
Schrijf deze Babylonische getallen als gewoon getal uit het tientallig stelsel.
43 : 00 : 40 = 154.840
27 : 28 : 00 = 98.880
01 : 01 : 01 : 01 = 219.661
20 : 00 : 00 : 02 = 4.320.002

ZO ZIT HET

- De **graad** van een knoop is het aantal lijnen dat aankomt in de knoop.
- Een **(on)even knoop** is een knoop van een (on)even graad.
- Een graaf met een eulerpad heeft **0** of **2** oneven knopen.

Knoop A heeft graad 1.
Knoop B heeft graad 3.

3 **Onderzoek de grafen.**

a Tel het aantal even en oneven knopen van de grafen in opdracht 2.

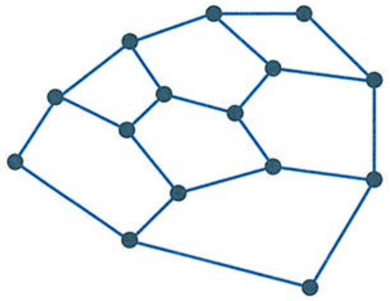
afbeelding	aantal knopen	aantal even knopen	aantal oneven knopen
opdracht 2a	7	5	2
opdracht 2b	8	4	4
opdracht 2c	12	12	0
opdracht 2d	16	16	0
opdracht 2e	10	8	2
opdracht 2f	5	3	2

b Wat valt je op aan de mogelijke startpunten voor de grafen met een eulerpad in opdracht 2?
Bijvoorbeeld: Elk startpunt is een oneven knoop. Als er geen oneven knopen zijn, is elk punt een startpunt.

c Onderzoek de beweringen:
1 'Een graaf met alleen even knopen heeft altijd een eulercircuit.'
Waar | Niet waar, want bijvoorbeeld: een graaf met alleen even knopen heeft 0 oneven knopen, dus er is een eulerpad. Als er alleen maar even knopen zijn, moet het beginpunt ook het eindpunt zijn. Dus is er ook een eulercircuit.

2 'In een graaf met een eulerpad is het aantal oneven knopen altijd oneven.'
Waar | Niet waar, want bijvoorbeeld: maak een optelsom van de graad van alle knopen. Dan krijg je 2 keer het aantal lijnen, want elke lijn verbindt 2 knopen. Dit is een even getal. Als je een oneven aantal oneven knopen zou hebben, dan zou je een oneven getal krijgen.

d Deze graaf heeft zeker geen eulerpad. Leg uit
Bijvoorbeeld: Er zijn veel meer dan 2 oneven knopen, dus is er geen eulerpad.



6 **Schrijf als Babylonisch getal.**
Gebruik steeds 2 cijfers op elke positie.

a

60 = 01 : 00	3600 = 01 : 00 : 00
360 = 06 : 00	3599 = 59 : 59
600 = 10 : 00	3601 = 01 : 00 : 01
2 = 00 : 02 of 02	7322 = 02 : 02 : 02
122 = 02 : 02	6000 = 01 : 40 : 00

b

36.000 = 10 : 00 : 00	439.322 = 02 : 02 : 02 : 02
215.999 = 59 : 59 : 59	12.959.999 = 59 : 59 : 59 : 59
180.005 = 50 : 00 : 05	1.098.305 = 05 : 05 : 05 : 05

7 **Reken de Babylonische optelsommen uit.**
Reken uit onder elkaar. Noteer ook wat je moet onthouden als je inwisselt.

01 : 25 + 01 : 35

01		
01	:	25
01	:	35 +
03	:	00

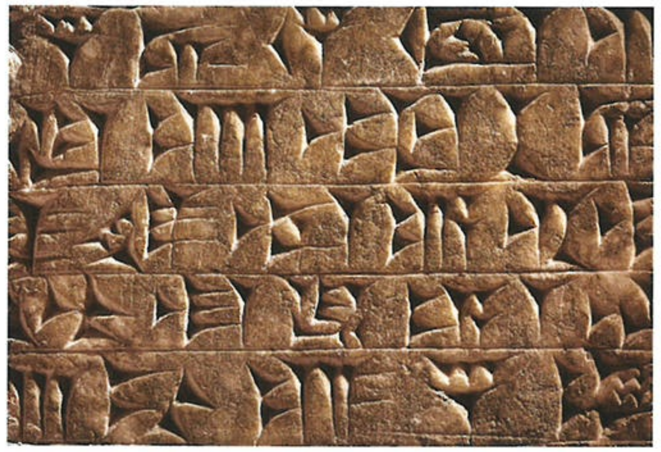
20 : 04 : 20 + 59 : 56 : 40

01		01		01		
		20	:	04	:	20
		59	:	56	:	40 +
01	:	20	:	01	:	00

8 **Reken de Babylonische aftreksommen uit in je schrift.**
Doe het op een manier die jij fijn vindt. Schrijf je antwoorden als Babylonische getallen. Gebruik steeds 2 cijfers op elke positie.

01 : 01 : 01 – 59 : 59 = 01 : 02
21 : 21 : 21 – 22 : 22 = 20 : 58 : 59
40 : 00 : 00 : 00 – 04 = 39 : 59 : 59 : 56

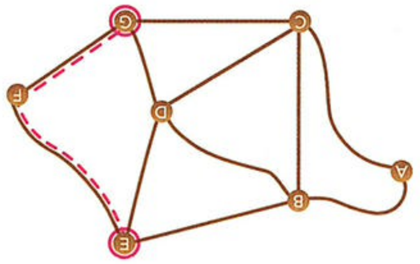
BLIK TERUG
Kijk opdracht 1 tot en met 8 na. Heb je nog vragen? Schrijf ze op en vraag uitleg tijdens de instructie. Bedenk 2 zinnen met het getal << ||| (zonder plaatshouder). Zorg dat het getal in jouw zinnen maar 1 betekenis kan hebben. Maar het moeten wel verschillende betekenissen zijn.



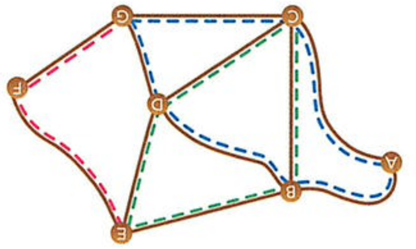
Wist je dat er mensen zijn die dit soort tabletten gewoon kunnen lezen?

ZO ZIT HET
Vind een eulerpad in een graaf met 2 oneven knopen.

STAP 1
Omcirkel de oneven knopen.
Maak een pad tussen de oneven knopen.



STAP 2
Begin bij 1 van de oneven knopen. Kleur een gesloten pad. Zijn er nog lijnen over? Doe hetzelfde met een nieuwe kleur vanuit de andere oneven knoop.
Heb je nog lijnen over? Maak dan een lus aan 1 van je paden. Ga door tot alle lijnen gekleurd zijn.

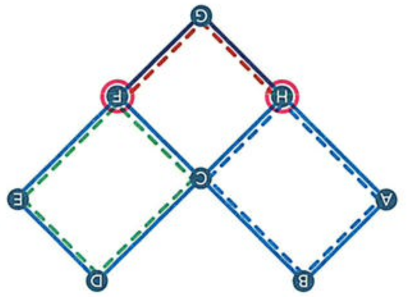


STAP 3
Schrijf het eulerpad op. Begin bij 1 oneven knoop.
Voeg per kleur de knopen in de juiste volgorde toe.

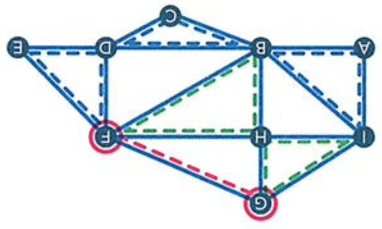
Het eulerpad is:
E – B – C – D – E – F – G
– D – B – A – C – G

4 **Vind een eulerpad.**

a oneven knopen: H en F
pad tussen deze knopen: bijvoorbeeld: H – G – F
eulerpad: bijvoorbeeld: H – A – B – C – H – G – F
– E – D – C – F



b oneven knopen: G en F
pad tussen deze knopen: bijvoorbeeld: G – F
eulerpad: bijvoorbeeld: F – E – D – C – B – A – I –
B – D – F – G – I – H – F – B – H – G



5 **Ontwerp een graaf met een eulerpad.**
Ontwerp in je schrift een klimpark met 7 plateaus. Er is 1 plateau met 3 verbindingen en 1 plateau met 5 verbindingen. Teken een graaf van het klimpark en beschrijf het eulerpad.

BLIK TERUG
Kijk opdracht 1 tot en met 5 na. Leg je juf of meester het verschil uit tussen een eulerpad en een eulercircuit. Het ontwerpen van routes in een klimpark is een beroep waarvoor veel wiskunde nodig is.

ZO ZIT HET

Er zijn ook kleitabletten gevonden waarop vermenigvuldigtafels staan. In het Babylonische stelsel gaan de tafels tot en met 59.

Dus in de tafel van 2 is de laatste som 59 × 2.
En de laatste tafel is de tafel van 59.
Dit symbool 𒀀 betekent keer of maal.

9 **Reken de Babylonische tafelsommen uit.**
Schrijf je antwoorden als Babylonische getallen. Gebruik steeds 2 cijfers op elke positie.

a

55 × 2 = 01 : 50	55 × 7 = 06 : 25
56 × 2 = 01 : 52	56 × 7 = 06 : 32
57 × 2 = 01 : 54	57 × 7 = 06 : 39
58 × 2 = 01 : 56	58 × 7 = 06 : 46
59 × 2 = 01 : 58	59 × 7 = 06 : 53

b

10 × 22 = 03 : 40	10 × 55 = 09 : 10
20 × 22 = 07 : 20	20 × 55 = 18 : 20
30 × 22 = 11 : 00	30 × 55 = 27 : 30
40 × 22 = 14 : 40	40 × 55 = 36 : 40
50 × 22 = 18 : 20	50 × 55 = 45 : 50

ZO ZIT HET

Er is een kleitablet gevonden met daarop de tafel van 5.
Alleen de sommen van 1 × 5 tot en met 20 × 5 en 30 × 5, 40 × 5 en 50 × 5 staan erop.
Dat is genoeg om alle sommen van de tafel van 5 te maken.

10 **Reken de Babylonische tafelsommen uit.**
Schrijf je antwoorden als Babylonische getallen.
Gebruik steeds 2 cijfers op elke positie.

Schrijf de berekeningen in je schrift.

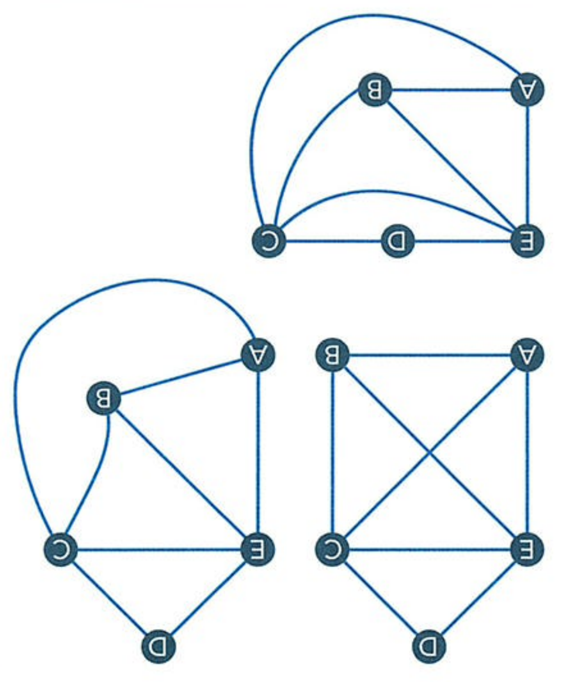
26 × 5 = 02 : 10
55 × 5 = 04 : 35

39 × 5 = 03 : 15
39 × 9 = 05 : 51

ZO ZIT HET

Deze grafen zien er verschillend uit, maar ze hebben dezelfde structuur. In wiskundetaal zeg je dan dat ze **isomorf** zijn:

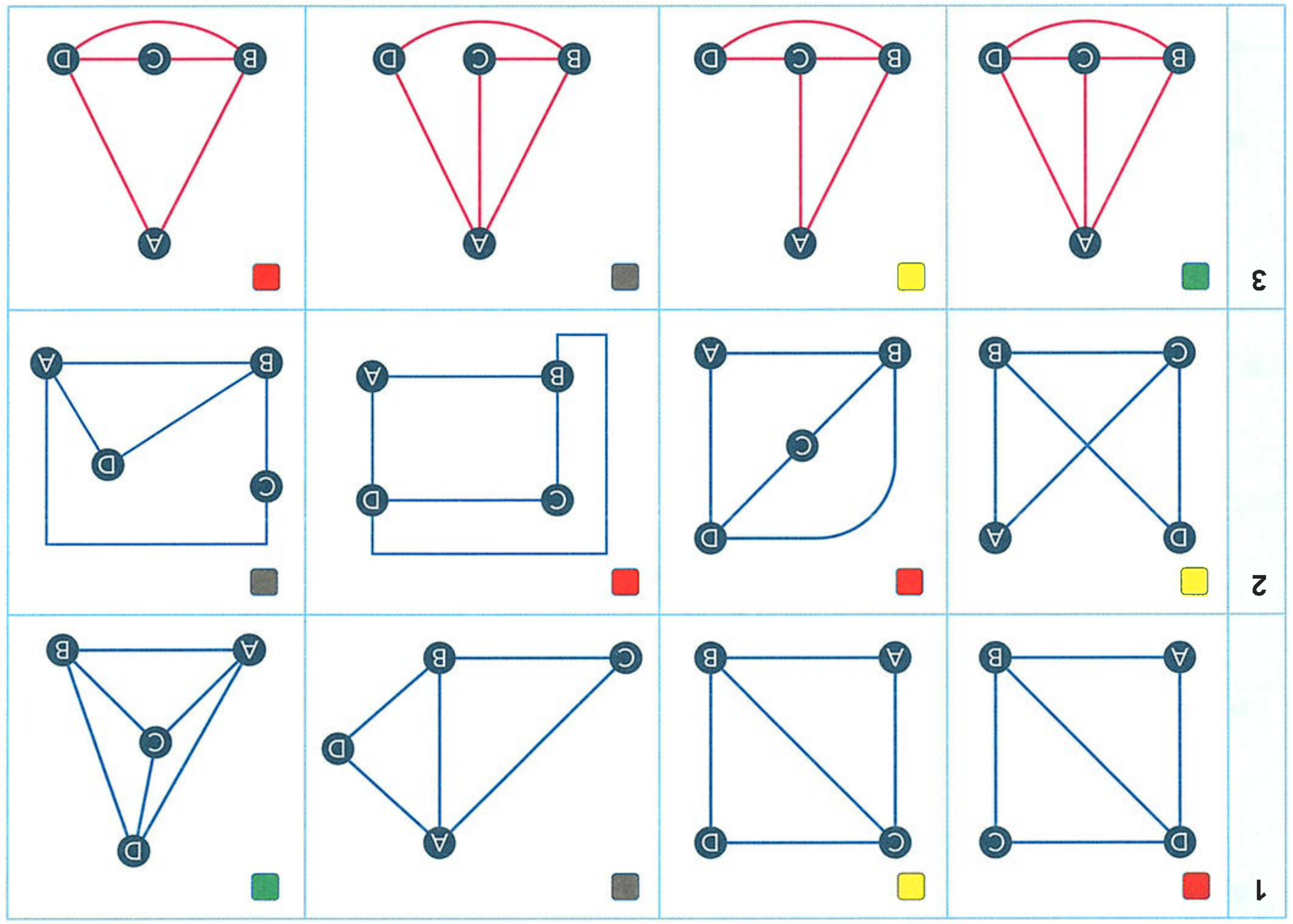
- Er zijn evenveel knopen.
- Er zijn evenveel lijnen.
- Bij elke knoop in de ene graaf hoort een knoop in de andere graaf die dezelfde graad heeft en op dezelfde manier is verbonden met de andere knopen.



6 **Onderzoek isomorfe grafen.**

a Welke grafen in rij 1 en 2 zijn isomorf? Geef de hokjes dezelfde kleur.

b Teken in rij 3 grafen die isomorf zijn met de grafen uit rij 1.



ZO ZIT HET

Er is een Babylonisch kleitablet ontdekt met daarop alle kwadraten tot en met 59.
Met een slim stappenplan konden de Babyloniërs hiermee alle vermenigvuldigingen tussen getallen tot 60 maken.

n	n²	n	n²	n	n²	n	n²	n	n²	n	n²
1	00 : 01	11	02 : 01	21	07 : 21	31	16 : 01	41	28 : 01	51	43 : 21
2	00 : 04	12	02 : 24	22	08 : 04	32	17 : 04	42	29 : 24	52	45 : 04
3	00 : 09	13	02 : 49	23	08 : 49	33	18 : 09	43	30 : 49	53	46 : 49
4	00 : 16	14	03 : 16	24	09 : 36	34	19 : 16	44	32 : 16	54	48 : 36
5	00 : 25	15	03 : 45	25	10 : 25	35	20 : 25	45	33 : 45	55	50 : 25
6	00 : 36	16	04 : 16	26	11 : 16	36	21 : 36	46	35 : 16	56	52 : 16
7	00 : 49	17	04 : 49	27	12 : 09	37	22 : 49	47	36 : 49	57	54 : 09
8	01 : 04	18	05 : 24	28	13 : 04	38	24 : 04	48	38 : 24	58	56 : 04
9	01 : 21	19	06 : 01	29	14 : 01	39	25 : 21	49	40 : 01	59	58 : 01
10	01 : 40	20	06 : 40	30	15 : 00	40	26 : 40	50	41 : 40		

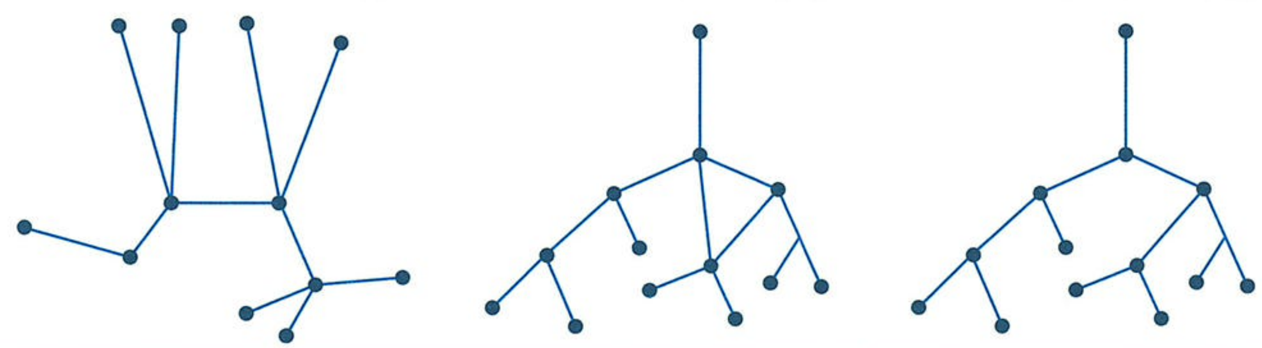
2 getallen met elkaar vermenigvuldigen	voorbeeld 23 × 35
STAP 1 Tel de 2 getallen bij elkaar op. Je hebt nu 3 getallen.	23 + 35 = 58
STAP 2 Zoek de kwadraten van deze 3 getallen op.	23^2 = 08 : 49 35^2 = 20 : 25 58^2 = 56 : 04
STAP 3 Neem het grootste kwadraat en trek de andere 2 kwadraten daarvan af.	56 : 04 – 20 : 25 – 8 : 49 = 26 : 50
STAP 4 Deel de uitkomst door 2 en je hebt het antwoord op de vermenigvuldiging.	de helft van 26 : 50 = 13 : 25 dus: 23 × 35 = 13 : 25

11 **Reken uit met het stappenplan.**
Schrijf je antwoorden als Babylonische getallen. Gebruik steeds 2 cijfers op elke positie.

vermenig-vuldiging	kwadraten		antwoord aftreksom	de helft
10 × 13 = ...	10^2 = 01 : 40 en 13^2 = 02 : 49	23^2 = 08 : 49	04 : 20	02 : 10
19 × 21 = ...	19^2 = 06 : 01 en 21^2 = 07 : 21	40^2 = 26 : 40	13 : 18	06 : 39
22 × 34 = ...	22^2 = 08 : 04 en 34^2 = 19 : 16	56^2 = 52 : 16	24 : 56	12 : 28

ZO ZIT HET

Een **boom** is een graaf zonder gesloten pad.

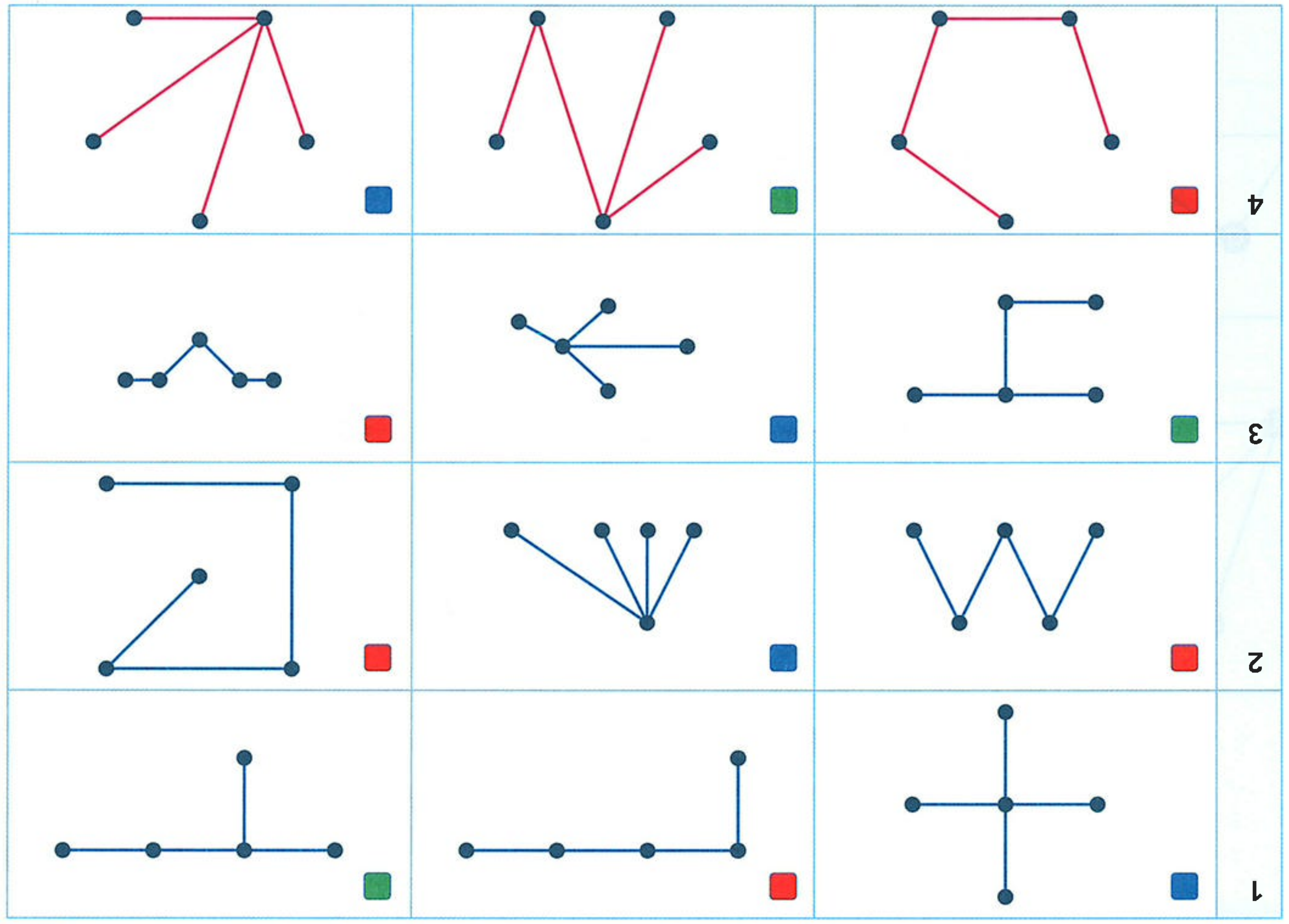


Dit is een boom. Dit is geen boom. Dit is een boom.

7 **Onderzoek isomorfe bomen.**

a Welke bomen in rij 1, 2 en 3 zijn isomorf? Geef de hokjes dezelfde kleur.

b Teken in rij 4 grafen die isomorf zijn met de grafen uit rij 1. Bijvoorbeeld:



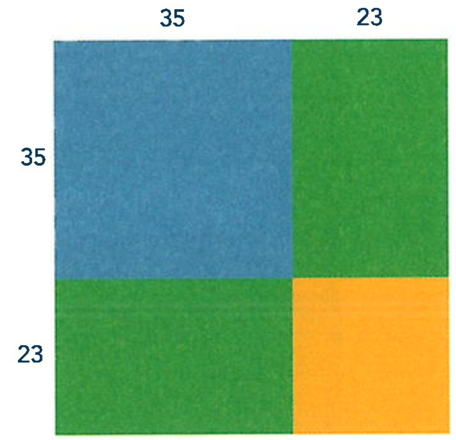
8 **Onderzoek isomorfe bomen.**
Met 4 knopen maak je deze bomen. Alle andere bomen met 4 knopen zijn isomorf met deze 2 typen.
Teken de mogelijke typen bomen in je schrift en vul de tabel in.

aantal knopen	2	3	4	5	6	7
aantal bomen	1	1	2	3	6	11

ZO ZIT HET

De Babyloniërs zagen vermenigvuldigingen als rechthoeken en kwadraten als vierkanten. Dat is niet zo gek, want de oppervlakte van een rechthoek is lengte × breedte en bij een vierkant is de oppervlakte dus een kwadraat.

12 Onderzoek het stappenplan.



a Bekijk de vermenigvuldiging 23 × 35 nog een keer met deze figuur erbij. Bijvoorbeeld:

Waar zie je 23 + 35?

de lengte van de zijden van het grote vierkant

Waar zie je de 3 kwadraten?

de oppervlakte van de 3 vierkanten (het blauwe, het gele en het grote vierkant)

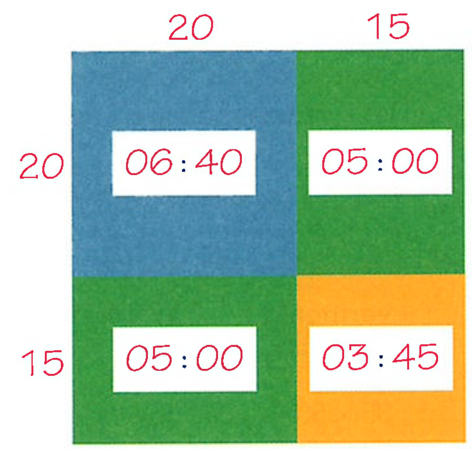
Waar zie je het antwoord op de aftreksom?

de oppervlakte van de 2 groene rechthoeken samen

Waar zie je het antwoord op de vermenigvuldiging?

de oppervlakte van 1 zo'n groene rechthoek

b Gebruik de figuur bij de som 15 × 20. Schrijf de oppervlaktes van de 4 delen in de rechthoeken.



Wat is de oppervlakte van het grote vierkant? 20 : 25

Lees de uitkomst af uit de figuur. 15 × 20 = 05 : 00

13 Reken de Babylonische vermenigvuldigingen handig uit.

Schrijf je uitkomsten als Babylonische getallen.
Gebruik steeds 2 cijfers op elke positie.

a Voor sommige vermenigvuldigingen heb je het stappenplan niet nodig als je handig rekent.
Tip: denk aan kloktijden.

28 × 30 = 14 × 01 : 00 = 14 : 00

04 : 00 × 20 = 02 : 00 × 40 = 01 : 20 : 00

15 : 00 × 12 = 01 : 00 : 00 × 3 = 03 : 00 : 00

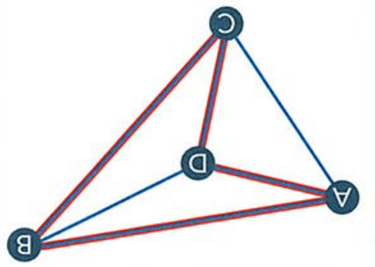
04 : 00 × 20 : 00 = 02 : 00 × 40 : 00 = 01 : 20 : 00 : 00

b Bedenk tafelsommen die gemakkelijk zijn met Babylonische vermenigvuldigingen, maar in het tientallig stelsel niet. Kies getallen onder 59. Vul in en reken uit. Bijvoorbeeld:

16 × 15 = 04 : 00	01 : 30 × 4 = 06 : 00
15 × 40 = 10 : 00	05 : 00 × 30 = 02 : 30 : 00
24 × 30 = 12 : 00	02 : 15 × 40 = 01 : 30 : 00

ZO ZIT HET

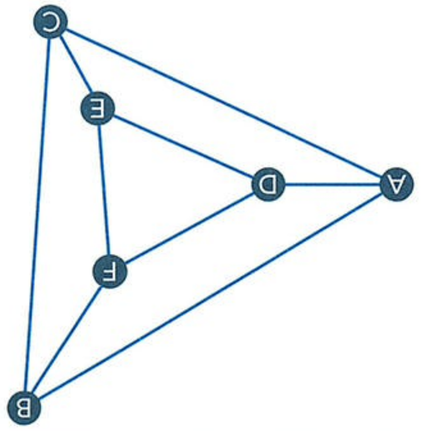
Soms kom je in een klimpark op elk plateau precies 1 keer.
Je volgt dan een **hamiltonpad**: een route in een graaf waarbij je elke knoop precies 1 keer bezoekt.
Een **hamiltoncircuit** is een gesloten hamiltonpad: je eindigt bij de knoop waar je bent gestart.
Let op: de richting doet er niet toe: A – D – C – B – A is hetzelfde hamiltoncircuit als A – B – C – D – A.



9 Vind de hamiltoncircuits.

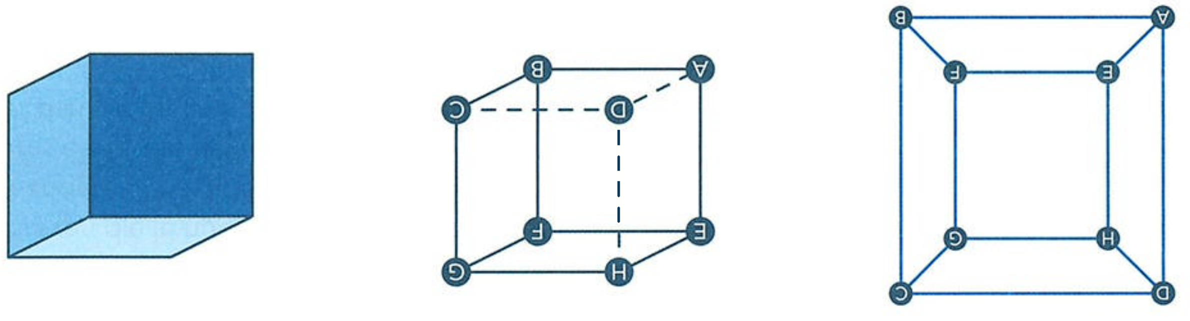
Begin bij knoop A.

A – B – C – E – F – D – A (= A – D – F – E – C – B – A)
A – B – F – D – E – C – A (= A – C – E – D – F – B – A)
A – C – B – F – E – D – A (= A – D – E – F – B – C – A)

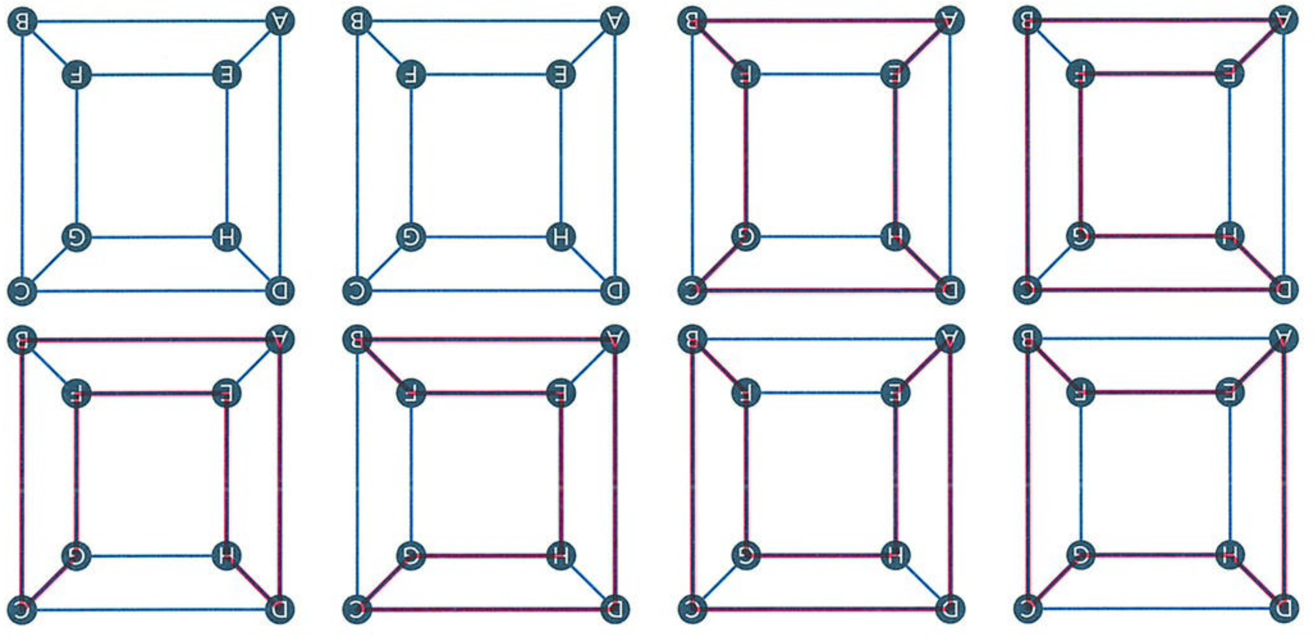


10 Onderzoek de hamiltoncircuits in een kubus.

Dit is een graaf van een kubus.



a Teken alle hamiltoncircuits die starten in knoop A. Je hebt niet alle afbeeldingen nodig.



b Hoeveel hamiltoncircuits heeft een kubus? Er zijn 6 hamiltoncircuits, want

bijvoorbeeld: vanuit elk hoekpunt krijg je steeds opnieuw deze circuits.

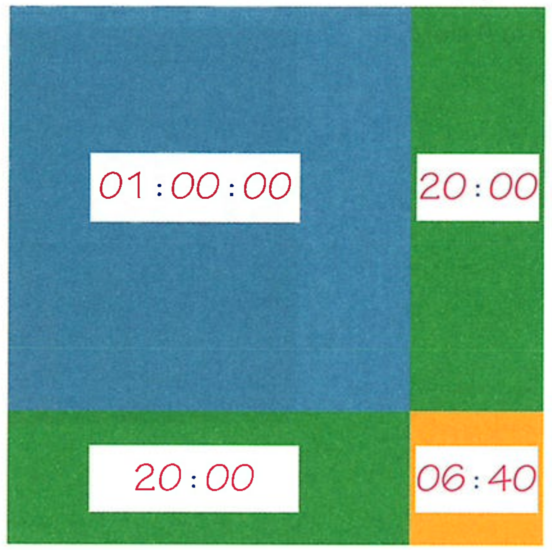
14 Reken de Babylonische kwadraten uit.

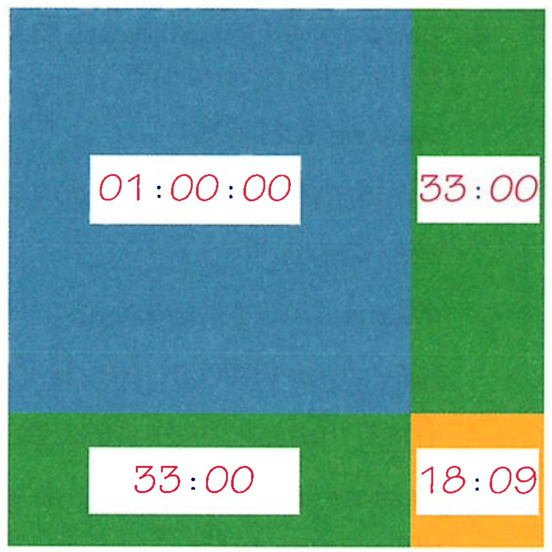
a 01 : 00 × 01 : 00 = 01 : 00 : 00

b Splits en reken uit. Gebruik de figuren.

01 : 20 × 01 : 20 = 01 : 46 : 40

01 : 33 × 01 : 33 = 02 : 24 : 09





c Reken uit in je schrift.

02 : 30 × 02 : 30 = 06 : 15 : 00

15 Reken de Babylonische vermenigvuldigingen uit.

Gebruik het stappenplan om 35 × 38 uit te rekenen. 35 + 38 = 01 : 33
Het kwadraat heb je bij opdracht 14b uitgerekend.

Maak bij de som 48 × 29 een tekening in je schrift om het kwadraat van de optelling uit te rekenen.

vermenig-vuldiging	kwadraten	antwoord aftreksom	de helft
35 × 58 = ...	35^2 = 20 : 25 en 58^2 = 56 : 04 $(01 : 33)^2$ = 02 : 24 : 09	01 : 07 : 40	33 : 50
48 × 29 = ...	48^2 = 38 : 24 en 29^2 = 14 : 01 $(01 : 17)^2$ = 01 : 38 : 49	46 : 24	23 : 12

BLIK TERUG

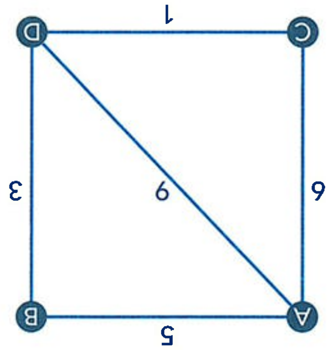
Kijk opdracht 9 tot en met 15 na. Hoe heb je bij opdracht 13b bedacht wat gemakkelijke tafelsommen kunnen zijn als je rekent met Babylonische getallen? Heb je bij opdracht 14 het kwadraat van 20 en van 33 zelf uitgerekend, of heb je het opgezocht in de kwadratentabel?

ZO ZIT HET

In een **gewogen graaf** is aan elke lijn een waarde toegekend. Die waarde geeft bijvoorbeeld de afstand aan tussen 2 knopen, of de tijd die je nodig hebt om die afstand te overbruggen. Soms geven de getallen de kosten aan om de verbinding aan te leggen. De lengte van de lijnen is dus niet belangrijk, het gaat om het getal.

11 Vind de kortste route.

In deze gewogen graaf geven de getallen langs de lijnen de afstand in kilometers tussen de knopen aan.



a Beschrijf het kortste pad van A naar D.

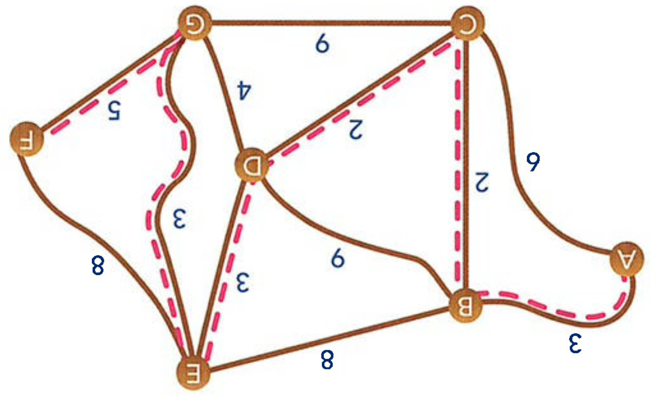
A – C – D geeft de kleinste totaalwaarde:
6 + 1 = 7 kilometer.

b Hoe vind je de kortste route?

Bijvoorbeeld: Er zijn 3 mogelijkheden om van A naar D te komen.
Reken ze uit en vergelijk om te weten welke route het kortst is.

12 Vind de kortste route.

In dit klimbos heeft Amber de tijd in minuten opgeschreven die je nodig hebt om van het ene naar het andere plateau te gaan. Een lange lijn heeft soms een korte tijd: met een roetsjbaan ga je sneller dan klauterend over een touwbrug.



a Kleur het pad met de snelste route van A naar F waarbij je langs elk plateau komt.
Bereken de tijd die je voor deze route nodig hebt.

18 minuten

b Wat is de snelste route van A naar F, waarbij je niet langs elk plateau hoeft?

A – B – C – D – G – F

Bereken de tijd die je voor deze route nodig hebt. 16 minuten

c Is er een eulercircuit?

Ja | Nee, want er zijn alleen even knopen.

Zo ja, bereken de tijd die je voor de eulerroute nodig hebt. 62 minuten

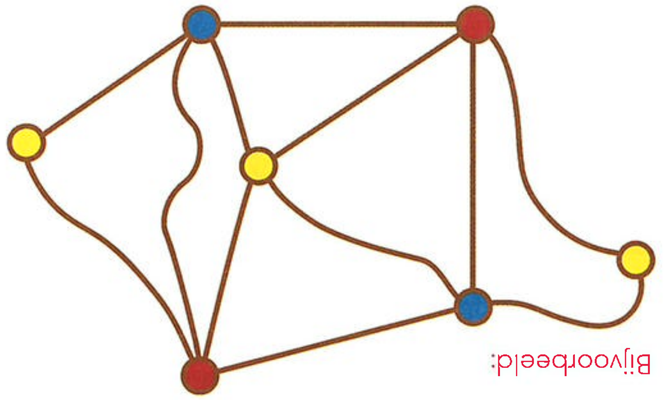
BLIK TERUG

Kijk opdracht 6 tot en met 12 na.
Kon je alle typen bomen en de hamiltonpaden vinden? Als je de begrippen eulerpad, eulercircuit, hamiltonpad, hamiltoncircuit en boom onder de knie hebt, ben je toe aan de XL-opdrachten.

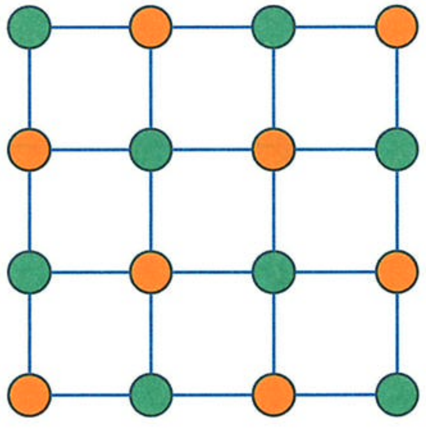
13 Onderzoek het kleurenvraagstuk.

a Amber wil de plateaus van haar klimpark een kleur geven. Als je van een plateau vertrekt, ga je altijd naar een andere kleur. Ze wil zo min mogelijk kleuren gebruiken.
Kleur de plateaus. Hoeveel kleuren heb je minimaal nodig? 3

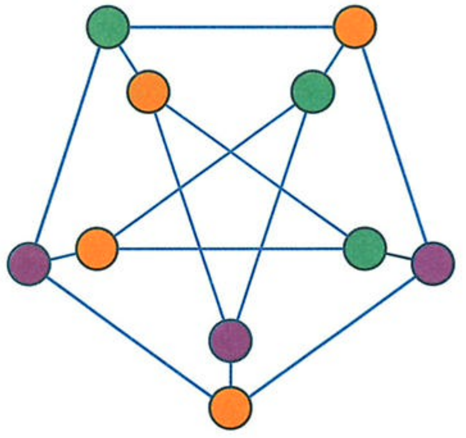
Bijvoorbeeld:



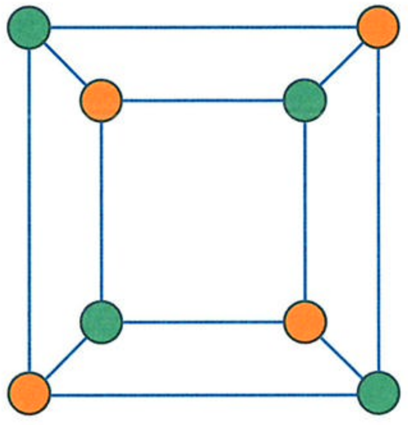
b Kleur de knopen met zo min mogelijk verschillende kleuren. Zorg ervoor dat 2 aangrenzende knopen verschillende kleuren krijgen. Bijvoorbeeld:



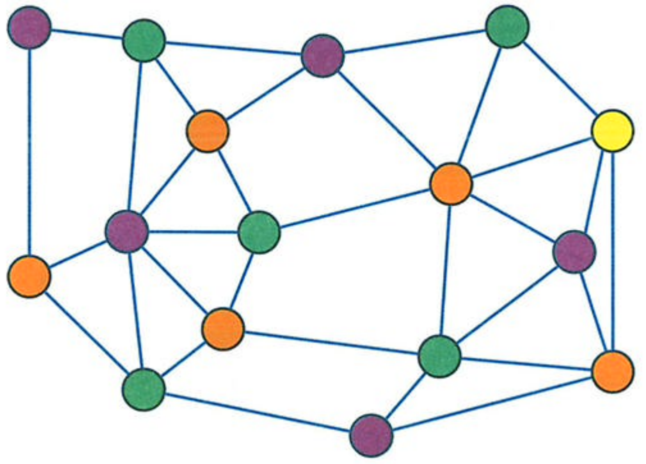
Het minimumaantal kleuren is 2.



Het minimumaantal kleuren is 3.



Het minimumaantal kleuren is 2.



Het minimumaantal kleuren is 4.

16 Onderzoek Babylonische kommagetallen.

a Bekijk de getallen die in de kolommen naast elkaar staan.
Wat valt je op? Noem 1 ding.

Bijvoorbeeld: Als je de getallen die naast elkaar staan met elkaar vermenigvuldigt, krijg je steeds 60.

b Bekijk het getal achter 8. Daar zie je een kommagetal 00 : 07,30.
Die eerste 2 nullen staan er niet, maar die zetten we er voor de duidelijkheid bij.
Bedenk wat er achter het getal 9 moet staan. Schrijf je antwoord met haken en spijkers en met gewone cijfersymbolen.

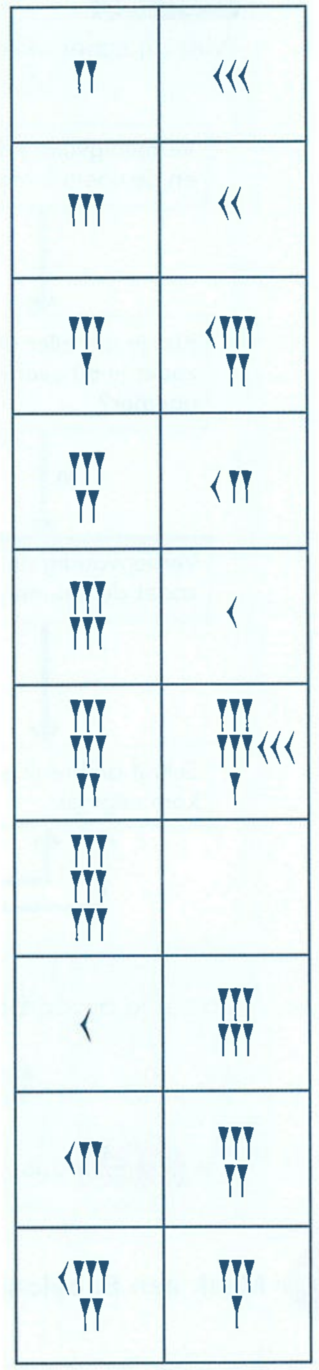
|||||| <<<< en 00,06 : 40

c De Babyloniërs gebruikten een soort kommagetallen voor de breuken.
Vul de tabel verder in.

tientallig: breuk	tientallig: kommagetal	Babylonisch
$\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$	0,5	00,30
$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$	0,3333	00,20
$\frac{1}{10} = \frac{10}{60}$	0,1	0,06
$\frac{1}{12} = \frac{5}{60}$	0,08333	00,05

d Sommige kommagetallen zijn mooi als je in het Babylonische talstelsel schrijft, maar een stuk lastiger in het tientallig stelsel.
Hoe denk je dat dit komt?

Bijvoorbeeld: Als de noemer 60, 3600 of … enzovoort is, dan zie je meteen welke cijfers achter de komma komen in het Babylonische talstelsel. Is de noemer 10, 100 of … enzovoort, dan zie je in het tientallig talstelsel gemakkelijk welke cijfers er achter de komma komen.



ZO ZIT HET

Met dit schema zet je breuken om naar Babylonische getallen.

- Vermenigvuldig de teller en de noemer met 60.
- Kun je de teller delen, zodat je 60 overhoudt als noemer?
  - ja: Vereenvoudig de breuk, zodat de noemer 60 wordt. → Schrijf de breuk als kommagetal.
  - nee: Splits de teller van de breuk in een zo groot mogelijk veelvoud van het getal waardoor je wilt delen en een rest. → Vereenvoudig de eerste breuk, zodat de noemer 60 wordt. Vermenigvuldig de teller en de noemer van de tweede breuk met 60. → Kun je de teller van de tweede breuk delen, zodat je 3600 overhoudt als noemer?
    - ja: Vereenvoudig de tweede breuk, zodat de noemer 3600 wordt. → Schrijf de breuk als kommagetal.
    - nee: Splits de teller van de tweede breuk in een zo groot mogelijk veelvoud van het getal waardoor je wilt delen en een rest. → Vereenvoudig de tweede breuk, zodat de noemer 3600 wordt. Vermenigvuldig de teller en de noemer van de derde breuk met 60. → Kun je de teller van de derde breuk delen, zodat je 216.000 overhoudt als noemer?
      - ja: Vereenvoudig de derde breuk, zodat de noemer 216.000 wordt. → Schrijf de breuk als kommagetal.
      - nee: → ...

Zo zet je bijvoorbeeld $\frac{1}{9}$ om. Volg de kleuren in het schema.

$$\frac{1}{9} = \frac{60}{9 \times 60} \rightarrow \frac{1}{9} = \frac{54}{9 \times 60} + \frac{6}{9 \times 60} \rightarrow \frac{1}{9} = \frac{6}{60} + \frac{6 \times 60}{9 \times 3600} = \frac{6}{60} + \frac{360}{9 \times 3600}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{6}{60} + \frac{40}{3600} \text{ dus } \frac{1}{9} \rightarrow 00{,}06 : 40$$

17 **Maak een Babylonisch kommagetal met het schema.**

$$\frac{1}{8} = \frac{60}{8 \times 60} \rightarrow \frac{1}{8} = \frac{56}{8 \times 60} + \frac{4}{8 \times 60} \rightarrow \frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{4 \times 60}{8 \times 3600} = \frac{7}{60} + \frac{240}{8 \times 3600} \rightarrow$$

$$\frac{1}{8} = \frac{7}{60} + \frac{30}{3600} \text{ dus } \frac{1}{8} \rightarrow 00{,}07 : 30$$

18 **Maak Babylonische kommagetallen met het schema.**

$\frac{3}{5}$ = 00,36

$\frac{3}{80}$ = 00,02 : 15

$\frac{2}{27}$ = 00,04 : 26 : 40

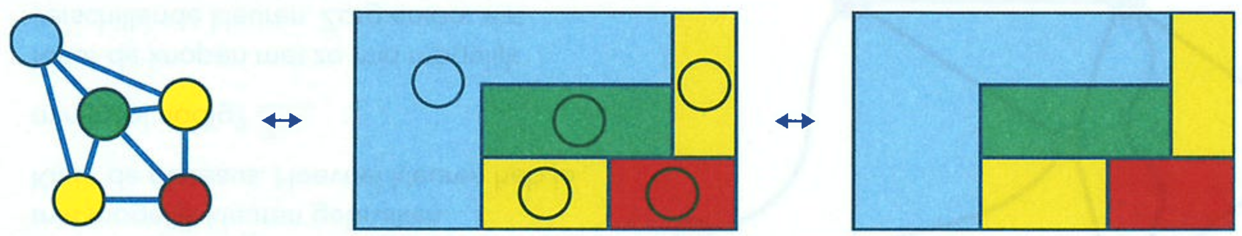
$1\frac{4}{5}$ = 01,48

$3\frac{7}{20}$ = 03,21

$63\frac{9}{80}$ = 01 : 03,06 : 45

ZO ZIT HET

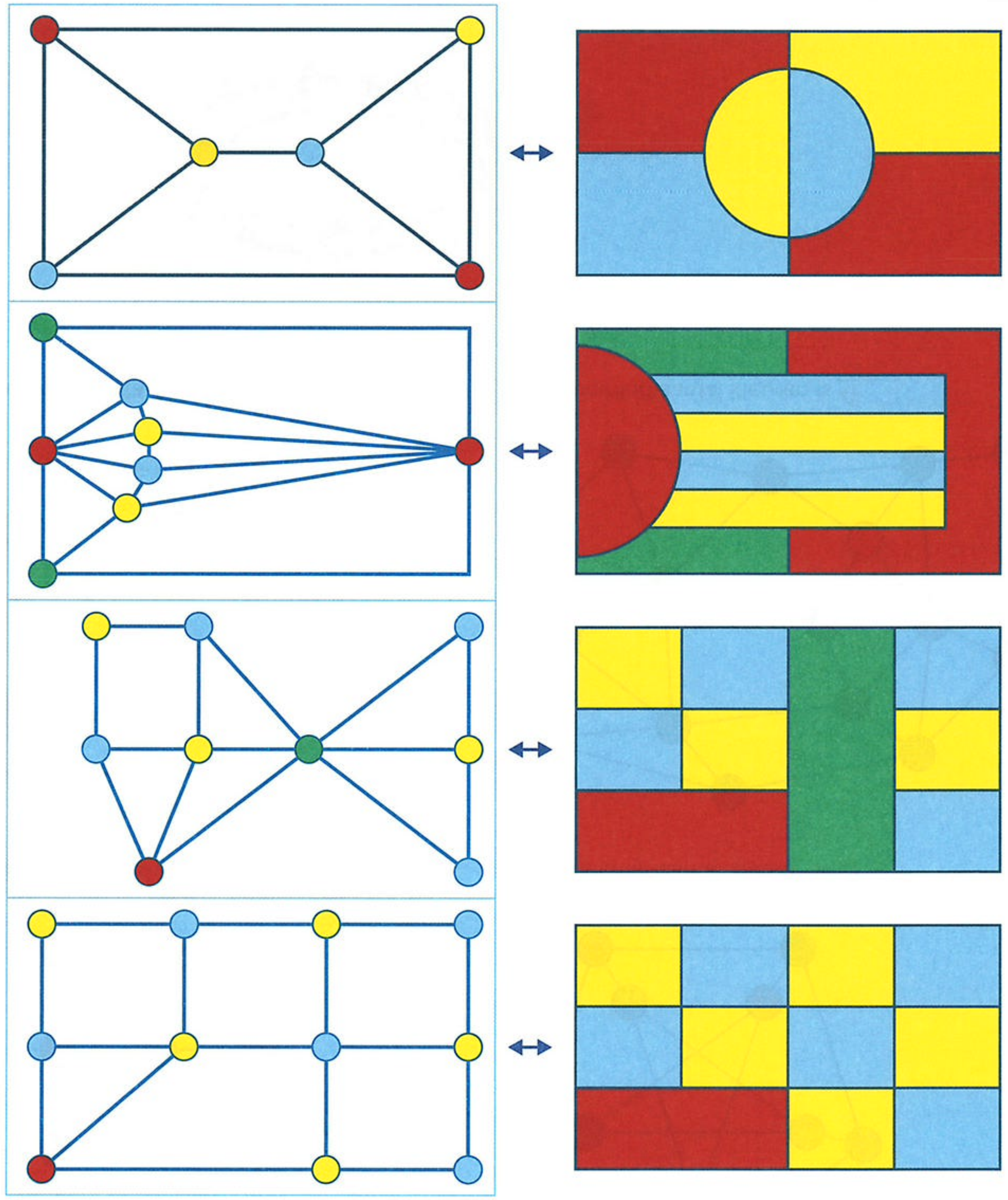
Een vlag met kleurvlakken kun je omzetten naar een graaf: een vlak wordt een knoop, een grens wordt een lijn. Of andersom. Bijvoorbeeld:



14 **Zet vlaggen om naar grafen en andersom.**

a Kleur elke vlag of graaf met zo min mogelijk kleuren.

b Teken de bijbehorende graaf of vlag. Bijvoorbeeld:



19 **Maak gewone breuken van de Babylonische breuken.**

a Vereenvoudig je antwoorden als dat kan.

$00{,}14 = \frac{7}{30}$ $00{,}06 : 45 = \frac{9}{80}$

$0{,}00 : 30 = \frac{1}{120}$ $00{,}00 : 00 : 01 = \frac{1}{216.000}$

b Maak een schema waarmee je gewone breuken maakt van Babylonische breuken. Gebruik de ruimte hieronder of teken het schema in je schrift. Bijvoorbeeld:

De eerste 2 cijfers na de komma worden de teller van een breuk met 60 in de noemer. → De volgende 2 cijfers worden de teller van een breuk met 3600 in de noemer. → De volgende 2 cijfers worden de teller van een breuk met 216.000 in de noemer, enzovoort. → Maak de breuken gelijknamig. Tel alle breuken bij elkaar op en vereenvoudig.

20 **Los dit Babylonische rekenraadsel op.**

Weet je nog van kleitablet AO 8862 op bladzijde 2?
Dit rekenraadsel staat erop. Je kunt dit vertalen als:

> Lengte en breedte heb ik met elkaar vermenigvuldigd. Wat de lengte uitsteekt over de breedte heb ik bij de oppervlakte opgeteld en dan krijg je 03 : 03,00. Lengte en breedte bij elkaar opgeteld is 27,0. Wat zijn de lengte en de breedte?

Reken het antwoord uit en schrijf ook je berekening op.

Bijvoorbeeld: In de kwadratentabel zoek ik een getal met een kwadraat in de buurt van 03 : 03. Ik kies 14. Ik probeer getallen die daarbij in de buurt liggen. 13 + 14 = 27; 13 × 14 = 03 : 02; 13 × 14 + 1 = 03 : 03,00. De lengte is 14, de breedte is 13.

BLIK TERUG

Kijk opdracht 16 tot en met 20 na. Leg uit waarom $\frac{1}{3}$ een mooi kommagetal is in het zestigtallig stelsel, en in het decimale stelsel een repeterende breuk. Leg aan je juf of meester uit hoe je het antwoord bij opdracht 19b en 20 hebt bedacht.

ZO ZIT HET

De **vierkleurenstelling** is in 1852 door de wiskundige Guthrie bedacht.

- Elke landkaart is met slechts 4 kleuren zo te kleuren dat aangrenzende landen niet dezelfde kleur krijgen.
- Aangrenzende landen zijn landen die aan elkaar grenzen met een stuk grens, dus niet met alleen 1 punt.

De stelling klinkt eenvoudig, toch is het **wiskundig bewijs** pas in 1976 met behulp van computers gemaakt.

15 **Kleur de graaf met 4 kleuren.**

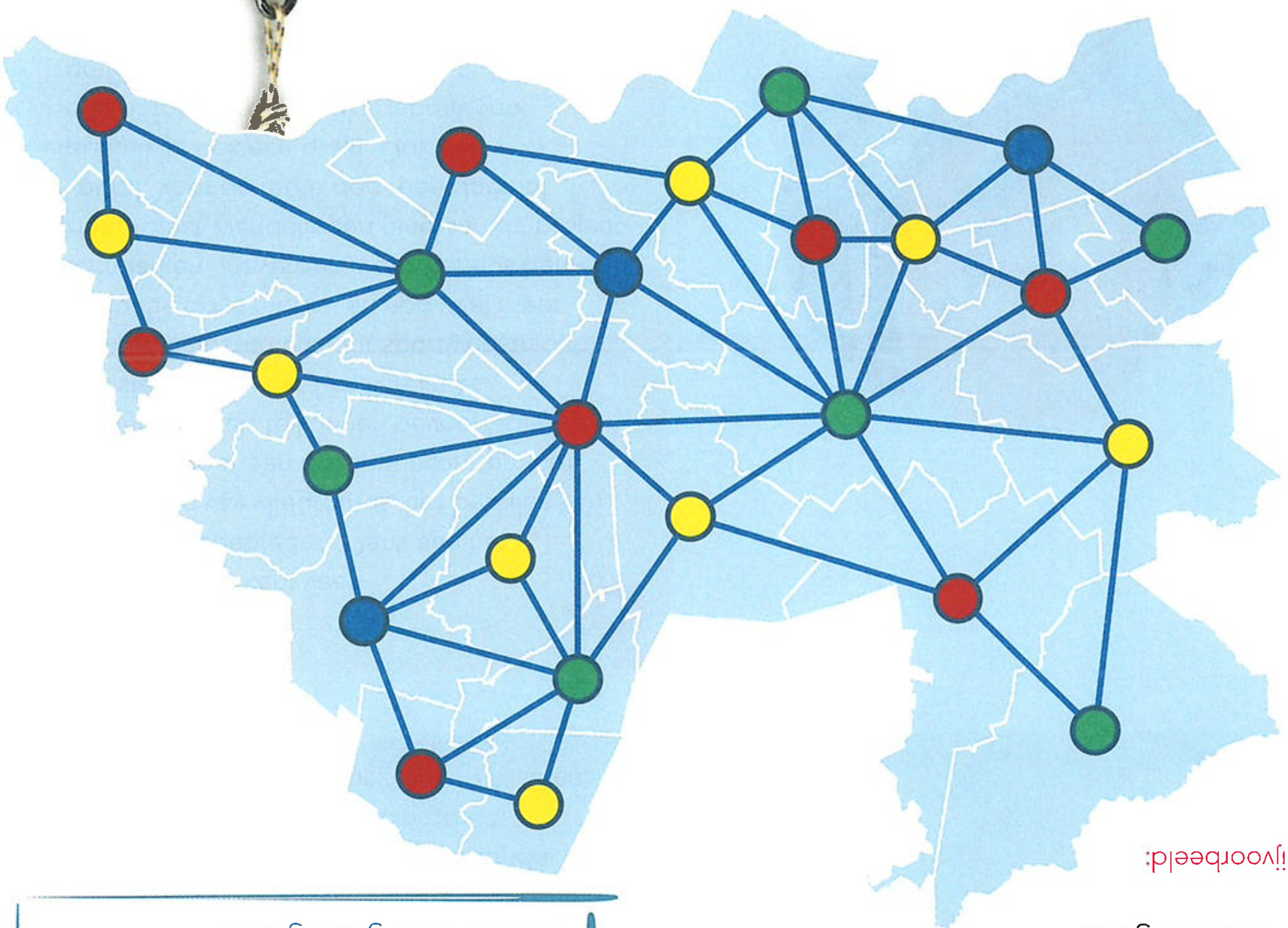
In elke gemeente van de provincie Utrecht is een cirkel getekend: 26 knopen.

- Teken de graaf. Verbind de knopen als 2 gemeenten aan elkaar grenzen.
- Kleur de graaf.

TIP

Kleur eerst knopen met de hoogste graad zoveel mogelijk in 1 kleur. Dan zoveel mogelijk knopen met een volgende kleur. Enzovoort. Zorg dat je aan 4 kleuren genoeg hebt.

Bijvoorbeeld:



BLIK TERUG

Kijk opdracht 13 tot en met 15 na. Zou je een ontwerp kunnen maken voor een klimpark, gebaseerd op de graaf van de provincie Utrecht? Als je alle opdrachten hebt gemaakt, kun je aan de slag met de eindopdracht.

MAAK EEN WERKBOEKJE OVER BABYLONISCH REKENEN

Je maakt een werkboekje over het vermenigvuldigen en de breuken bij de Babyloniërs, voor de kinderen uit je groep.

Bladzijde 1
Leg vermenigvuldigen uit:
- voor sommen waarbij je de kwadratentabel kunt gebruiken;
- voor sommen waarbij je het kwadraat op een andere manier moet uitrekenen.

Bladzijde 2
Leg over breuken uit:
- hoe de breuken werden genoteerd;
- hoe je breuken moet omrekenen.

Bladzijde 3
Maak een werkblad met vermenigvuldigsommen en sommen met breuken.

Bladzijde 4
Maak een antwoordblad bij het werkblad.

Niet de bladzijden aan elkaar tot een boekje.
Houd het antwoordblad apart.
Maak er tekeningen bij als je nog tijd over hebt.

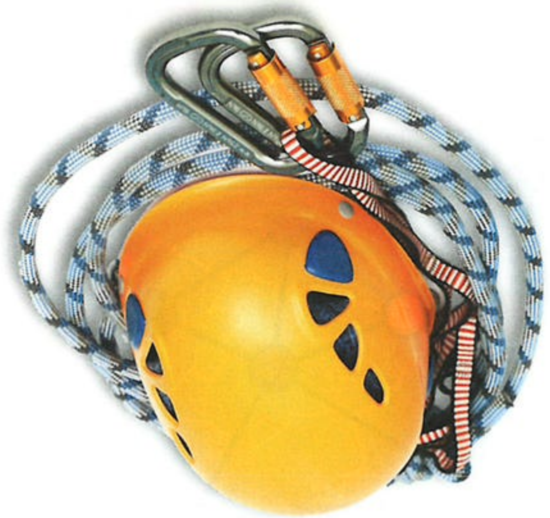
Heb je een ander idee voor de eindopdracht? Bespreek het met je juf of meester.

DE EISEN

- Het werkboekje ziet er verzorgd uit.
- De uitleg over vermenigvuldigen is duidelijk.
- De uitleg over breuken is duidelijk.
- Er is een werkblad met vermenigvuldigsommen en sommen met breuken.
- Er is een antwoordblad met de juiste antwoorden.
- De eindopdracht is klaar binnen 2 lesuren.

BLIK TERUG

Het is best even wennen met die getallen tot 60, die op verschillende plaatsen staan, tot ver achter de komma. Maar je weet nu ook hoe het komt dat het getal 60 belangrijk is in onze cultuur. Je bent niet alleen een pientere rekenaar, je hebt ook dingen geleerd over de geschiedenis van het rekenen.



BLIK TERUG

Grafentheorie kent veel toepassingsgebieden. Denk aan het ontwerpen van vliegroutes, het bepalen van de plaats voor een distributiecentrum om efficiënt winkels te kunnen bevoorraden, een stamboom met familierelaties, competitiesystemen voor sportwedstrijden, navigatie op je mobiel en nog veel meer. Klimparken ontwerpen is een serieus beroep! Het project Wandelingen ging aan dit project vooraf. Voor de route door een doolhof gebruik je ook een graaf. Ook een doolhofontwerper maakt gebruik van grafentheorie.

ONTWERP EEN KLIMPARK

Maak een plattegrond voor een klimpark. Gebruik 15 bomen. In die bomen komen plateaus. Bedenk verschillende soorten verbindingen tussen alle plateaus.

- Oudere kinderen kunnen een route nemen waarbij ze elke **verbinding** precies 1 keer volgen (eulerpad). Beschrijf het pad met letters onder de plattegrond.
- Voor jonge kinderen is er een groene route. Daarmee komen ze op elk **plateau** 1 keer en zijn dan weer terug bij het startpunt (hamiltoncircuit). Teken het pad in met groen.
- Teken een ingang voor jonge kinderen en een ingang voor oudere kinderen.
- Verzin zelf nog een bijzonder pad, bijvoorbeeld een kortste of hoogste route. Beschrijf het pad met letters onder de plattegrond.

Heb je een ander idee voor de eindopdracht? Bespreek het met je juf of meester.

DE EISEN

- Er zijn 15 knopen, 2 ervan zijn oneven.
- Er is een beschrijving van een eulerpad.
- Er zijn groene lijnen die een hamiltoncircuit aangeven.
- Er is een beschrijving van een bijzonder pad.
- De plattegrond ziet er verzorgd uit.
- De eindopdracht is klaar binnen 2 lesuren.

DIT VIND IK!

Van het project:	--	-+	+-	++
Het project was op mijn niveau:	O	O	O	O
Ik heb doorgezet, ook als het moeilijk was:	O	O	O	O
Ik wil meer leren over dit onderwerp:	O	O	O	O

En ik vind:

DIT VINDT DE JUF OF MEESTER!

Van het project:	--	-+	+-	++
Je inzet was:	O	O	O	O
Je vroeg hulp als het nodig was:	O	O	O	O
Je had plezier in het leren:	O	O	O	O

En ik vind:

--	-+	+-	++	Beoordeel de eindopdracht. Dit zijn de eisen:	--	-+	+-	++
O	O	O	O	Het werkboekje ziet er verzorgd uit.	O	O	O	O
O	O	O	O	De uitleg over vermenigvuldigen is duidelijk.	O	O	O	O
O	O	O	O	De uitleg over breuken is duidelijk.	O	O	O	O
O	O	O	O	Er is een werkblad met vermenigvuldigsommen en sommen met breuken.	O	O	O	O
O	O	O	O	Er is een antwoordblad met de juiste antwoorden.	O	O	O	O
O	O	O	O	De eindopdracht was klaar binnen 2 lesuren.	O	O	O	O

Dit zou ik de volgende keer anders doen:

Dit kun je de volgende keer anders doen:

Dit spreken we af:

Jouw handtekening:

Handtekening juf of meester:

DIT VIND IK!

Van het project:	--	-+	+-	++
Het project was op mijn niveau:	O	O	O	O
Ik heb doorgezet, ook als het moeilijk was:	O	O	O	O
Ik wil meer leren over dit onderwerp:	O	O	O	O

En ik vind:

DIT VINDT DE JUF OF MEESTER!

Van het project:	--	-+	+-	++
Je inzet was:	O	O	O	O
Je vroeg hulp als het nodig was:	O	O	O	O
Je had plezier in het leren:	O	O	O	O

En ik vind:

--	-+	+-	++	Beoordeel de eindopdracht. Dit zijn de eisen:	--	-+	+-	++
O	O	O	O	Er zijn 15 knopen, 2 ervan zijn oneven.	O	O	O	O
O	O	O	O	Er is een beschrijving van een eulerpad.	O	O	O	O
O	O	O	O	Er zijn groene lijnen die een hamiltoncircuit aangeven.	O	O	O	O
O	O	O	O	Er is een beschrijving van een bijzonder pad.	O	O	O	O
O	O	O	O	De plattegrond ziet er verzorgd uit.	O	O	O	O
O	O	O	O	De eindopdracht was klaar binnen 2 lesuren.	O	O	O	O

Dit zou ik de volgende keer anders doen:

Dit kun je de volgende keer anders doen:

Dit spreken we af:

Jouw handtekening:

Handtekening juf of meester: